

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Элементы комбинаторной геометрии
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Математика
	Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
	кафедра дискретной математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: В.Л. Дольников, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 12.02.2024

Аннотация

Комбинаторная геометрия (дискретная геометрия) — раздел математики, в котором изучаются геометрические объекты с точки зрения комбинаторики (дискретной математики). То есть мы рассматриваем конечное число (или счетное число) геометрических объектов и пытаемся понять их свойства. Эта область математики связана с теорией графов, теорией чисел и многими другими разделами геометрии и комбинаторики.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- освоение основных понятий элементов комбинаторной геометрии.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области комбинаторной геометрии;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области комбинаторной геометрии;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области комбинаторной геометрии.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории элементов комбинаторной геометрии;
- современные проблемы соответствующих разделов комбинаторной геометрии;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть образовательной программы;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач комбинаторной геометрии.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач комбинаторной геометрии;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов комбинаторной геометрии;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Основные определения и понятия выпуклой геометрии (выпуклая оболочка, отделимость и т.д.)	6	6		15
2	Отрезки на прямой и дуги на окружности	6	6		15
3	Задачи о расстояниях	6	6		15
4	Теорема Борсука – Улама – Люстерника – Шнирельмана (БД кроме одномерного случая).	6	6		15
5	Проблема Борсука на плоскости в евклидовой метрике и в метрики Минковского.	6	6		15
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

1. Основные определения и понятия выпуклой геометрии (выпуклая оболочка, отделимость и т.д.)

Задачи комбинаторной геометрии (обзор).

2. Отрезки на прямой и дуги на окружности

Точки и прямые. Теорема Сильвестра – Галлаи и теорема Эрдёша.

3. Задачи о расстояниях

Теорема Эрдёша о целых расстояниях в множестве на плоскости, число пар точек с данными расстояниями между парами точек множества на плоскости.

Геометрия Минковского. Диаметры и минидиаметры.

4. Теорема Борсука – Улама – Люстерника – Шнирельмана (БД кроме одномерного случая).

Проблема Борсука. Тела постоянной ширины.

5. Проблема Борсука на плоскости в евклидовой метрике и в метрики Минковского.

Универсальные покрывающие (примеры на плоскости и в пространстве). Проблема Лебега. Симплекс Гэйла. Шестиугольник Пала.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Дискретный анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флеров, О. С. Федько ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т .— М. : МФТИ, 2012 .— 248 с.
2. Геометрия [Текст] : [учебник для вузов] / В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров .— 2-е изд., испр. — М. : Изд-во МЦНМО, 2007 .— 328 с.

Дополнительная литература

1. Проблема Секефальви-Надя в комбинаторной геометрии [Текст]/В. Г. Болтянский, Э. Д. Баладзе, -М., Наука : Физматлит, 1997

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций. В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение дисциплины требует:

- посещения студентом всех видов аудиторных занятий;
- ведения конспекта в ходе лекционных занятий;
- качественной самостоятельной подготовки к практическим занятиям, активной работы на них;
- активной самостоятельной и аудиторной работы студента;
- своевременной сдачи преподавателю заданий по аудиторным видам работ.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: Математика
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра дискретной математики
курс: 2
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: В.Л. Дольников, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Элементы комбинаторной геометрии» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории элементов комбинаторной геометрии;
- современные проблемы соответствующих разделов комбинаторной геометрии;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть образовательной программы;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач комбинаторной геометрии.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач комбинаторной геометрии;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов комбинаторной геометрии;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Реализуйте локальные методы улучшения треугольной дискретной поверхности. В каких случаях её можно свести к сетке Делоне?
2. Как распределить точки на сфере, чтобы как объём выпуклой оболочки был максимальным?
3. С помощью дескриптора теплопроводности реализуйте сглаживание поверхности. Какие свойства поверхности можно извлечь с его помощью?
4. Сколько компонент у разложения Гельмгольца-Ходжа векторного поля? Какими свойствами они обладают?
5. Определите потоки (векторные поля) главных кривизн на дискретной поверхности и введите локальные координаты вдоль них.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Основные понятия и определения выпуклой геометрии.
2. Теорема Каратеодори и теорема Хелли.
3. Применения теоремы Хелли: неравенство Юнга, теорема о центральной точке.
4. Техника минимизации и её применения. Цветная теорема Каратеодори и цветная теорема Хелли. Теорема Тверберга.
5. Степень отображения и некоторые её применения. Топологическая лемма об отображении симплекса в себя. Деление меры на выпуклые части заданного размера. Теорема Кнастера–Куратовского–Мазуркевича и теорема Брауэра о неподвижной точке. Усиления цветной теоремы Каратеодори.
6. Теорема Борсука–Улама в простейшем случае.
7. Теорема «о бутерброде». Кривая моментов и её обобщения, полиномиальный вариант теоремы о бутерброде.
8. Полиномиальное деление одной меры в духе Гута–Каца и его свойства.
9. Теорема Семереди–Троттера о числе инцидентности точек и прямых. Оценки на множество сумм и множество произведений вещественных чисел.
10. Соединение точек на плоскости графом с небольшим числом пересечений с любой прямой, теорема Шазеля–Вельцля.
11. Теорема Дольникова о пересечениях гиперплоскостями и хроматическое число графа Кнезера. Обобщения теоремы Борсука–Улама для действия группы из двух элементов.
12. Каноническое расслоение над пространством Грассмана, теорема Дольникова о трансверсали и теорема о центральной трансверсали.
13. Обобщения теоремы Борсука–Улама для действия групп простого порядка. Топологическая теорема Тверберга и деление мер на равные части на прямой.
14. Когомологии Чеха, лемма о нерве покрытия и топологическая теорема Хелли.

Критерии оценивания

- Оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
- Оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
- Оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений.
- Оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
- Оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
- Оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
- Оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.
- Оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

- Оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.
- Оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.